

חזרה: פרנל ופראונהופר

- נבדיל בין עקיפת פרנל ופראונהופר. כל הקרינה עוברת ברדיוס ρ בתוך המסך. אם הסטיות מן הציר הראשי הן קטנות, אזי בנקודה P יהיה המופע של הגל

$$k_0 d = k_0 \sqrt{L^2 + |r - p|^2} \approx k_0 L + \frac{k_0}{2L} (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + p^2) + \dots$$

- כיון שתמיד $r < \rho$ יהיה האבר הרבועי המרבי $k_0 \rho^2 / 2L$
- שינוי מופע הגל צריך להיות קטן יחסית ל- $\pi / 2$:

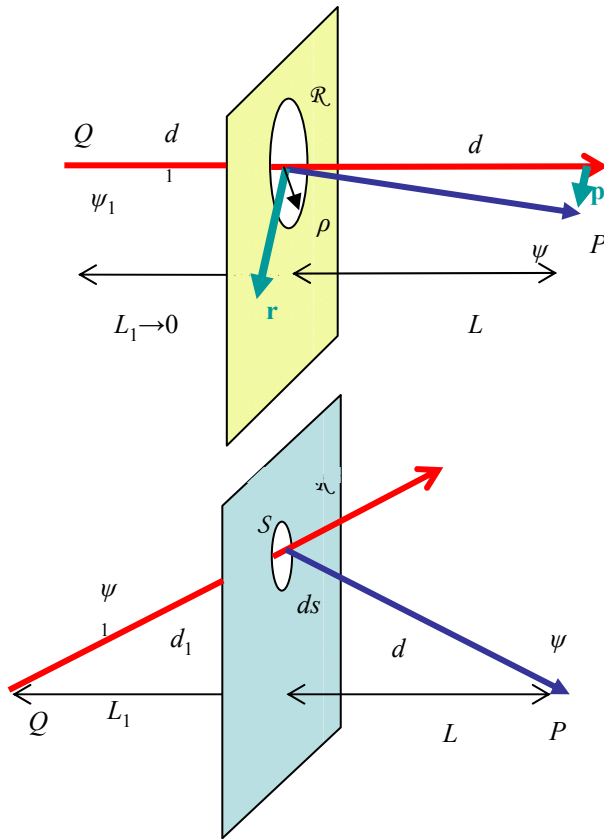
עקיפת פראונהופר מתקיימת עבור $\rho^2 \geq \lambda L$

עקיפת פרנל מתקיימת עבור $\rho^2 \ll \lambda L$

- בטווח סופי

עקיפת פראונהופר מתקיימת עבור $\rho^2 \geq \lambda L L_1 / (L + L_1)$

עקיפת פרנל מתקיימת עבור $\rho^2 \ll \lambda L L_1 / (L + L_1)$

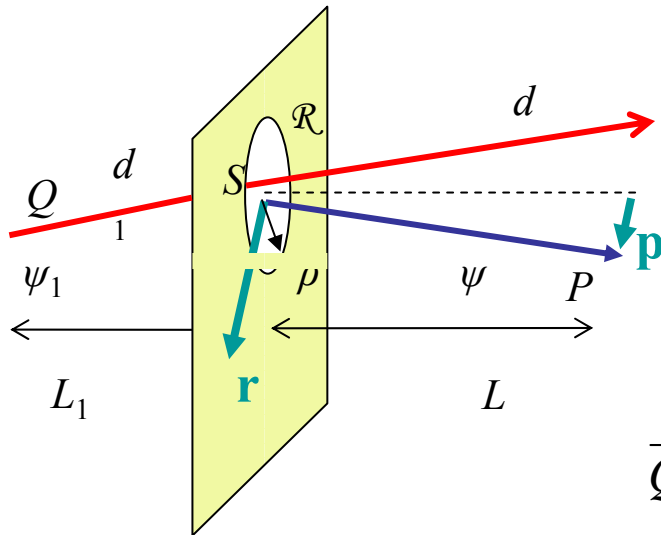


מופע קוי

- בעקיפת פראונהופר שינוי המופע באזור העקיפה הוא קוי.
- לעקיפת פראונהופר יש צורך להרחיק את המקור לאינסוף כדי לקבל קרן מקבילה, ולהרחיק את הצופה לאינסוף מאזור העקיפה.

- אפשרות אחרת היא שימוש במערכת אופטית המביאה את המקור ו/או את הדמות למוקד.

- סך אורך המסלול האופטי מהמקור דרך המסך לנקודת התצפית היא



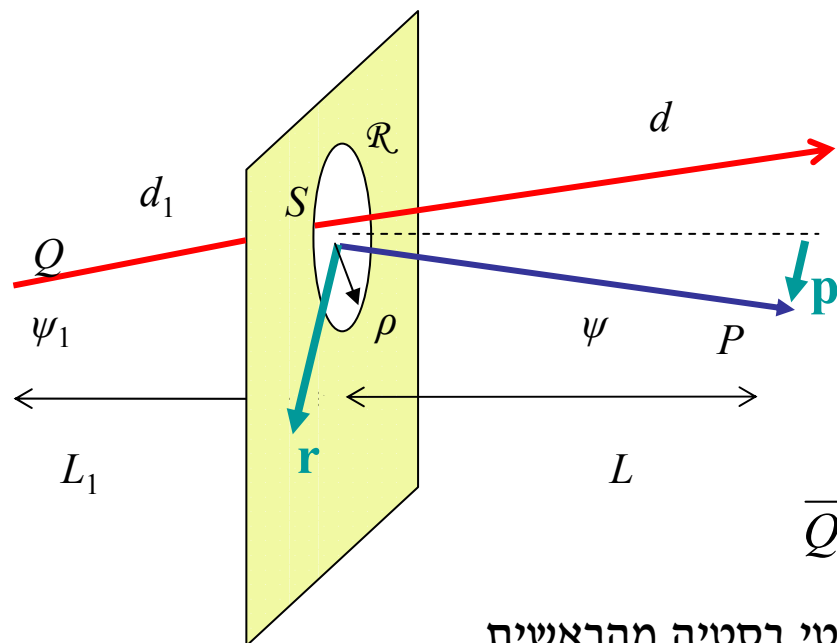
$$\overline{QSP} \approx L + L_1 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) + \frac{1}{2L} (p^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) + \dots$$

- יהיו l, m, n קוסינוסי הכיוון של SP . אם $p \ll L$ אזי $\mathbf{p} \approx L(l, m)$

- לכן

$$\begin{aligned} \overline{QSP} &\approx L + L_1 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) + \frac{L}{2} (l^2 + m^2) - (xl + ym) + \dots \\ &\approx L + L_1 - xl - ym \end{aligned}$$

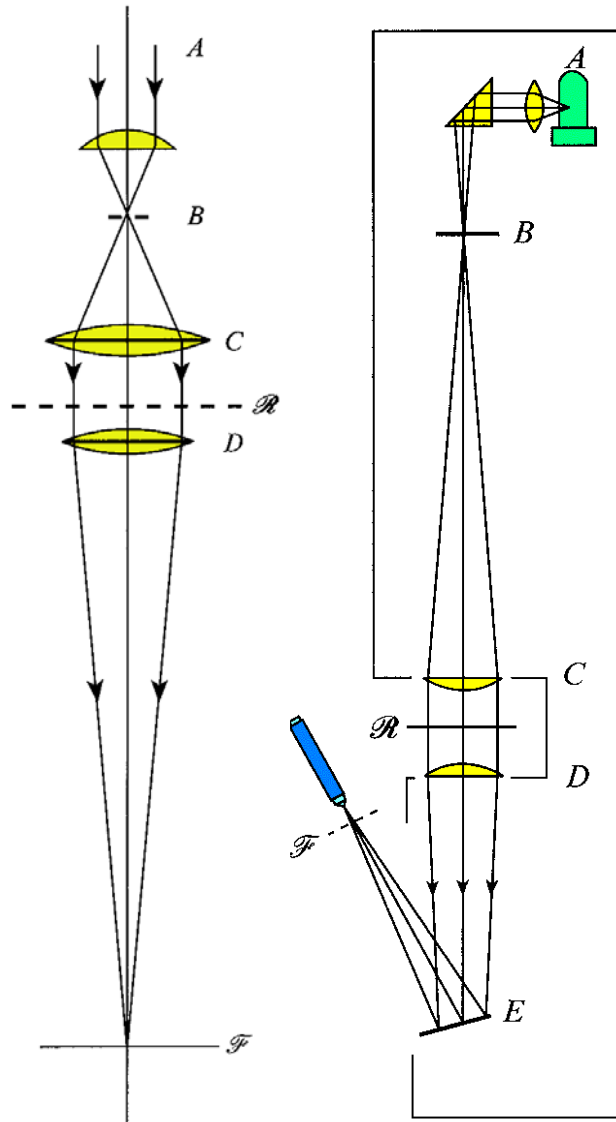
תלות קוית



$$\overline{QSP} \approx L + L_1 - xl - ym$$

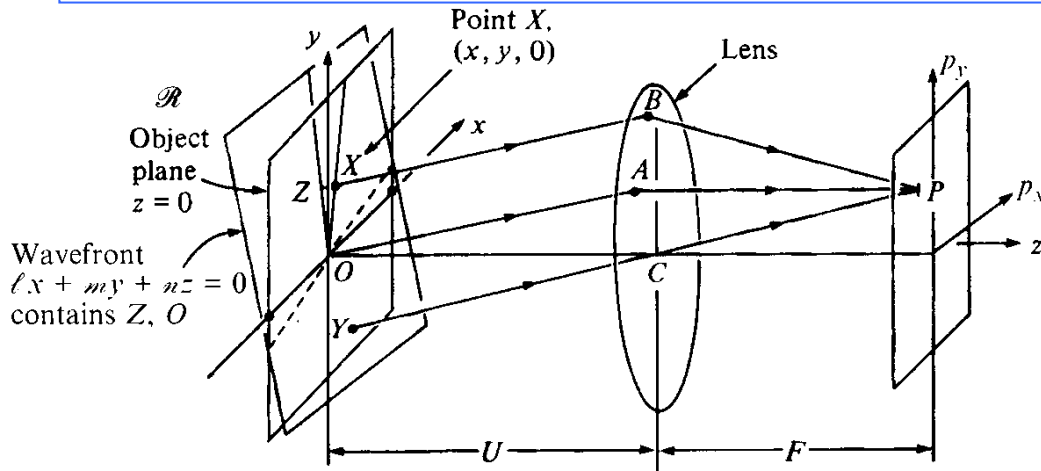
- קיבלנו את התלות הקוית של המסלול האופטי בסטיה מהראשית.
- ניתן באמצעים ניסיוניים פשוטים לאפס את התלות הריבועית.
- לרוב התצפית נעשית במקום צמוד לעצם Q (או $L_1 = -L$).
- תצפית זו נעשית כאשר מסתכלים בעצם רחוק כאשר הגורם העוקף קרוב לעין.
- במעבדה משתמשים בעדשות בודדות או במערכות עדשות, כמו בדיפרקטומטר.

הרפרקטומטר



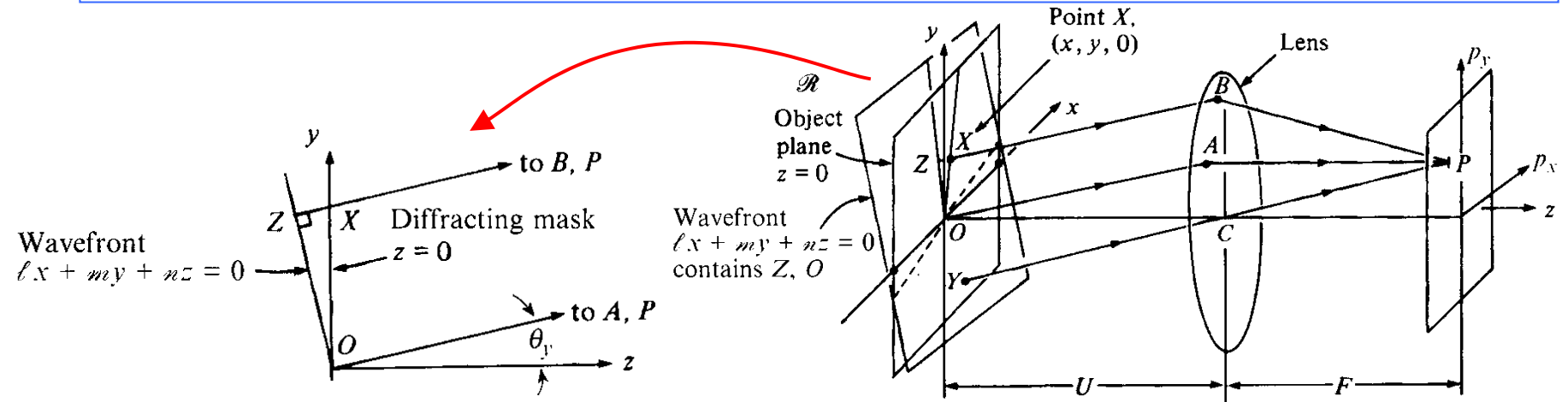
- מקור אור A (לבן מרוכז, או ליזר) יוצר דמות דרך חריר B .
- החריר נמצא במוקד של עדשה C וכך יוצר חזית גל מישורית.
- חזית הגל המישורית פוגעת במסכה R . כך מקבלים $L_1 \rightarrow \infty$.
- האור העובר את המסיכה עובר דרך עדשה נוספת D .
- נקודת התצפית היא מישור המוקד של העדשה F, D . כך $L \rightarrow \infty$.
- כל נקודה במישור המוקד תואמת לוקטור (Ll, Mm) .
- מישור התצפית צמוד למקור הנקודתי, ללא תלות במרחק בין העדשות.
- פותח כמחשב אנלוגי לפתרון עקיפה מגביש בקרני רנטגן.
- שימש ליצירת מרבית תמונות העקיפה להלן.

עקיפה ודימות



- נניח חזית גל מישורית לאורך הציר האופטי, ותצפית במוקד העדשה שאורך המוקד שלה F .
- במישור $z = 0$ קיימת מסכה $f(x, y)$.
- כל האור נאסף על ידי העדשה במישור $z = U$ ומתמקד במישור $z = U + F$ בנקודה P .
- הקרניים YC, OA, XB מקבילות ומתרכזות במוקד, ומרחקן למוקד הוא לדוגמה XBP .
- האור הוא סכום הקרניים הללו, כל אחת עם גורם מופע מהסוג $\exp(i k_0 XBP)$.
- המשרעת בנקודה X היא משרעת הגל (נניח יחידה) כפולה בהעברת המסכה $f(x, y)$ בנקודה זו.
- לפי עיקרון פרמה, כל המרחקים האופטיים מנקודות שונות על אותה חזית גל, המגיעות למוקד, שווים.
- יהיו l, m, n קוסינוסי הכיוון של OA , ולכן חזית הגל היא המישור $lx + my + nz = 0$.

מסלולים אופטיים



- חזית הגל היא המישור $lx + my + nz = 0$
- ZX היא ההפרש בין שתי הקרניים XBP ו- OAP .
- ZX היא ההטלה של OX על הקרן XB .
- היא ניתנת לביטוי כרכיב הוקטור $(x, y, 0)$ בכיוון (l, m, n) : $ZX = lx + my$
- לכן ההפרש הוא $XBP = OAP - lx - my$
- כעת ניתן לחבר את התרומות של המסכה עם גורמי המופע בגלל המסלולים האופטיים השונים, מהסוג

$$f(x, y) \exp(i k_0 XBP)$$

עקיפה והתמרה

$$\psi_P = \exp(ik_0 \overline{OAP}) \iint f(x, y) \exp[-ik_0(lx + my)] dx dy$$

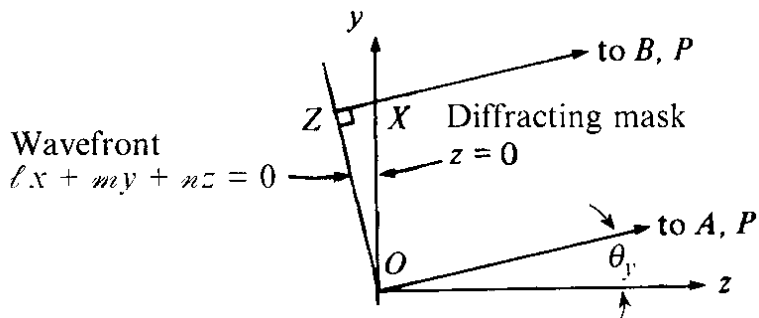
- נגדיר משתנים $u \equiv l k_0$ ו- $v \equiv m k_0$ לסימון נקודת המוקד P :

$$\psi(u, v) = \exp(ik_0 \overline{OAP}) \iint f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy$$

- ניתן אם כן לכתוב את תבנית העקיפה של פראונהופר כהתמרת פוריה דו-מימדית של פונקצית העברת המסכה $f(x, y)$

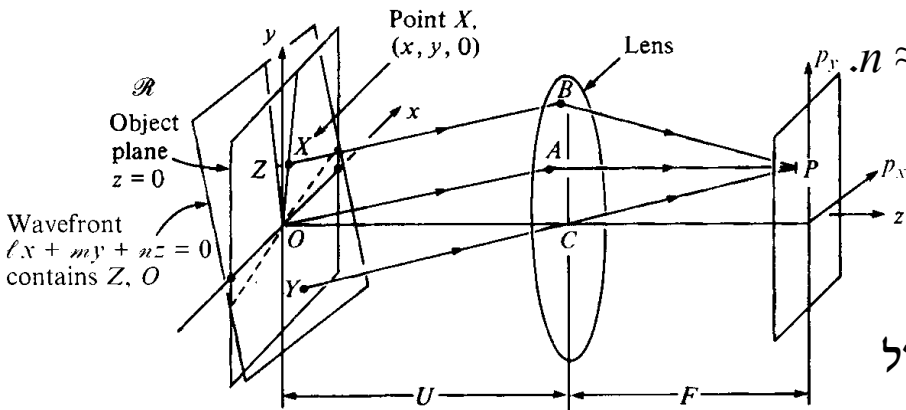
- ניתן להשתמש במקום במשתנים (u, v) בזוויות העקיפה (θ_x, θ_y) בין הוקטור (l, m, n) והמישורים האנכי והאופקי בהתאמה שבהם נמצא הציר האופטי.

- הזוויות מקיימות $l = \sin \theta_x$ ו- $m = \sin \theta_y$. כך מקבלים $(u, v) = k_0 (\sin \theta_x, \sin \theta_y)$.



דימות העקיפה

- הקואורדינטות (p_x, p_y) של המוקד P קשורות ישירות ל-
 (u, v) אם ידועים פרטי העדשה.



- בקרוב הפרקסיאלי (הגאומטרי) הזוויות קטנות, כלומר $n \approx 1$. מכאן מיקום המוקד יהיה
- $(p_x, p_y) = (l, m) F / n = (u, v) F / k_0$
- למרות שיש "עדשות פוריה" קשה לרוב לקבל התמרת פוריה בזוויות גדולות, מה שמגביל מאוד את היישום של הדימות.

- בעת הצפייה והמדידה של תבנית עקיפה, מודדים לרוב את ריבוע הערך המוחלט של הגל, ולכן המקדם התלוי במופע של המסלול האופטי אינו חשוב. בעקבות זאת מזניחים את גורם המופע וכותבים

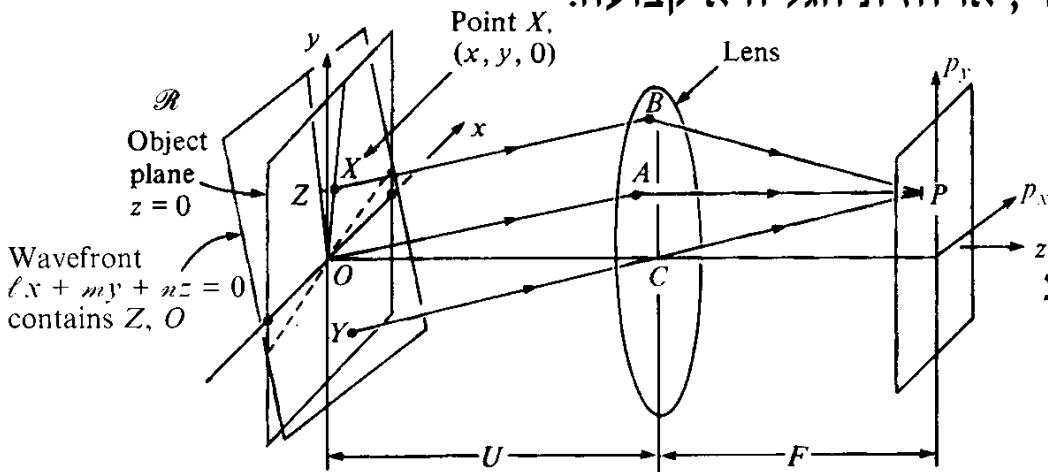
$$\psi(u, v) = \iint f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy$$

מופע העקיפה

- עוצמת תבנית העקיפה אינה תלויה במיקום המדויק של המסכה, כיון שהמרחק בינה לבין העדשה משנה רק את גורם המופע לפני האינטגרל. במקרה התאבכות למשל, חשוב לדעת גם את המופע הזה.
- גורם המופע $\exp(i k_0 OAP)$ אינו תלוי במסכה, כיון שהוא תלוי במערכת האופטית. אם כך, נחשב אותו עבור המקרה שהמסכה היא פונקצית- δ (חריר) בראשית:

$$\psi(u, v) = \exp(i k_0 \overline{OAP}) \iint \delta(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy = \exp(i k_0 \overline{OAP})$$

- מכל המרחקים, נבחר דוקא לשים את המסכה במוקד הקדמי של העדשה $OC = U = F$.
- במקרה זה, הגל היוצא מן העדשה הוא מישורי, או חזית הגל היא קבועה.



- כאשר העצם במישור המוקד הקדמי, תבנית העקיפה של פראונהופר היא התמרת פוריה המרוכבת האמיתית של העצם.
- בכל מקום אחר עוצמת העקיפה היא התמרת פוריה של העצם, אך לא מופע העקיפה.

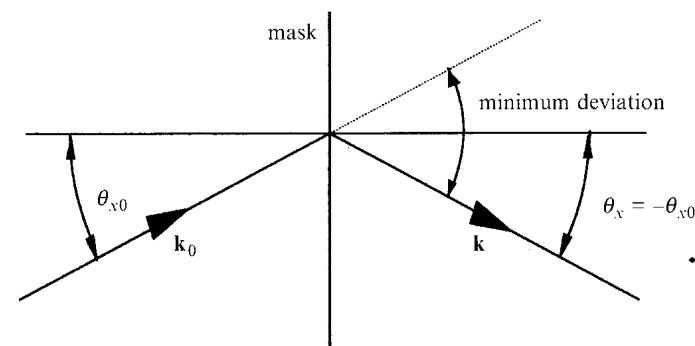
עקיפה בהארה אלכסונית

- כעת ניתן לגל הפוגע להגיע בזווית שקוסינוסי הכיוון שלה הם (l_0, m_0, n_0) .
- מופע הגל המגיע לנקודה (x, y) במסכה התקדם בשיעור $k_0(xl_0 + ym_0)$ ביחס לראשית.
- לכן העיכוב של הרכיב היוצא מהנקודה (x, y) שונה בשיעור $k_0[(l - l_0)x + (m - m_0)y]$ ביחס לראשית.
- נקבל כעת באינטגרל

$$\psi_P = \exp(ik_0 \overline{OAP}) \iint f(x, y) \exp\{-ik_0[(l - l_0)x + (m - m_0)y]\} dx dy$$

- שחזור לביטוי הקודם אם נגדיר כעת (למשל עבור u)

$$u \equiv k_0(l - l_0) \equiv k_0(\sin \theta_x - \sin \theta_{x0}) = 2k_0 \sin \frac{\theta_x - \theta_{x0}}{2} \cos \frac{\theta_x + \theta_{x0}}{2}$$



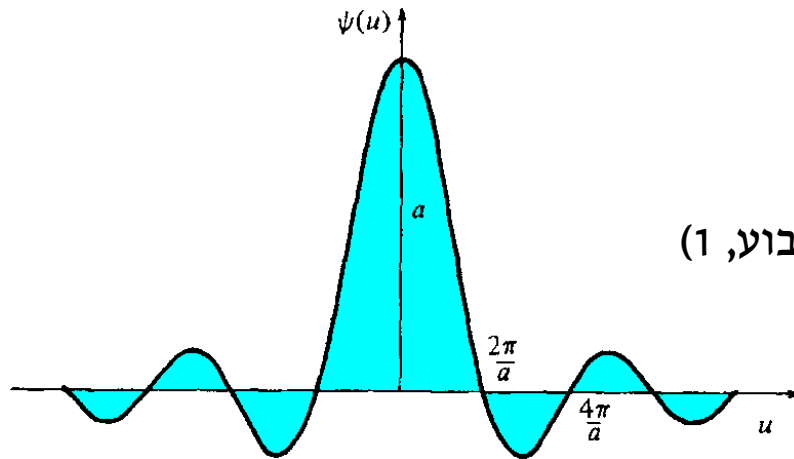
- נניח שהסטיה u קבועה, אזי נובע מתוך המכפלה שהסטיה המזערית תהיה כאשר סכום הזוויות מתאפס ($\cos = 1$).
- זה קורה כאשר המסכה חוצה את הזווית בין הקרן הנכנסת והיוצאת.
- בוחרים ערך זה של סטיה מזערית בסריגי עקיפה והולוגרמות.

עקיפה בסדק

- נייצג סדק שרוחבו a ואורכו אינסופי על ידי

$$f(x, y) = \text{rect} \frac{x}{a} = \begin{cases} 1 & |x| \leq a/2 \\ 0 & |x| > a/2 \end{cases}$$

- לכן קל לפרק את האינטגרל למכפלה (התלות ב- y היא קבוע, 1)



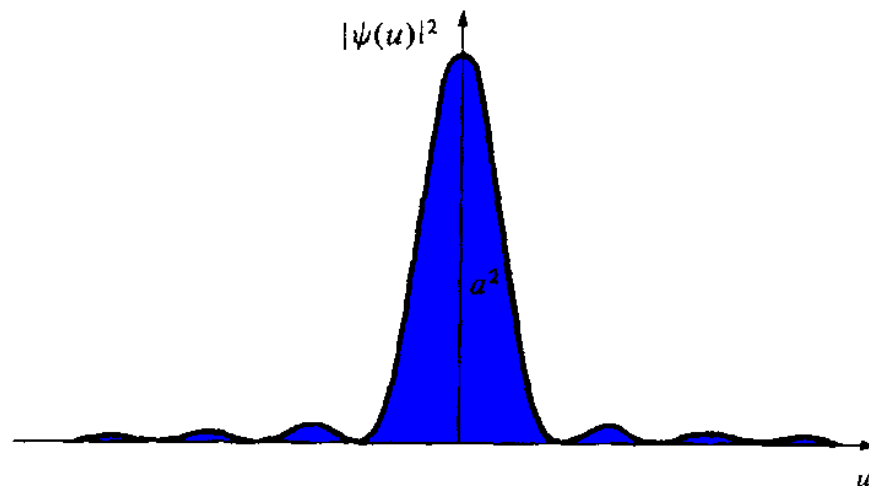
$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= \iint f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iux} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivy} dy = a \text{sinc}(au/2) \delta(v) \end{aligned}$$

- העוצמה לאורך הציר $v = 0$ היא

$$|\psi(u, 0)|^2 = a^2 \text{sinc}^2(au/2)$$

- קל לחשב את מיקום האפסים בפונקציות;

קשה לחשב את מיקום נקודות האקסטרמום.



עקיפה בסדק ממושטט

- נניח כעת שההעברה בקצוות הסדק, שרוחבו שוב a , תלויה קוית ב- x :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - |x|/a & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

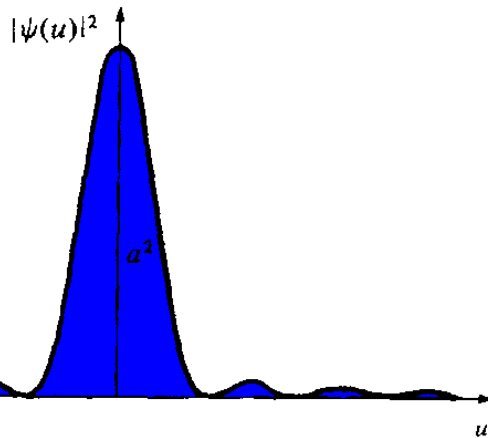
- לסדק רוחב מעשי כמו קודם:

$$\frac{\int f(x) dx}{f_{\max}} = a$$

- נעשה אינטגרציה בשני חלקים:

$$\psi(u, v) = \left[\frac{1}{a} \int_0^a (a-x) e^{-iux} dx + \frac{1}{a} \int_a^0 (a+x) e^{-iux} dx \right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} dy = a \operatorname{sinc}^2(au/2) \delta(v)$$

- קיבלנו פתרון שרוחבו כמו של סדק יחיד, אבל עוצמתו בשוליים מונחתת בריבוע.
- זוהי תוצאה כללית – ככל שהקצוות חלקים יותר, כך מונחתות אונות הצד במרחב פוריה. הגאוסיאן הוא הדוגמה הקיצונית של כלל זה.



עקיפה בעצם מופע

- עצמים רבים אינם בולעים אור, אלא רק משנים את המופע שלו. כל חלון זכוכית הוא דוגמה לכך. הוא שקוף, אך עוביו אינו אחיד. בגלל כך אור העובר דרכו משנה את מופעו.
- ההפרש האופטי בין שני מסלולים בעוביים שונים (מקדם השבירה μ) יהיה

$$(\mu - 1)(t_2 - t_1)$$

- חזית הגל מישורית החודרת לעצם, אינה בוקעת ממנו מישורית.
- נייצג עצם מופע כזה על ידי מסכה שמשרעתה 1 ומופעו משתנה. למשל במנסרה אינסופית:

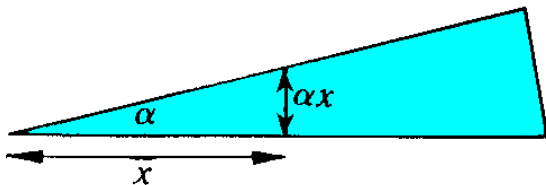
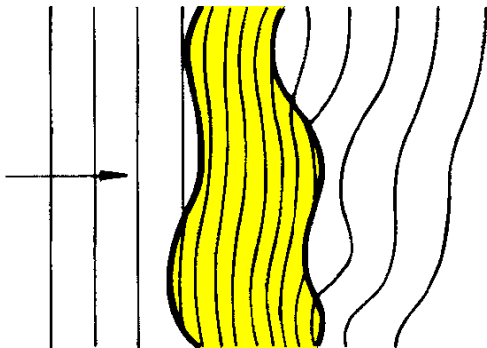
$$f(x, y) = \exp[ik_0(\mu - 1)t] = \exp[ik_0(\mu - 1)\alpha x]$$

- העקיפה מן המנסרה תהיה

$$\psi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0(\mu - 1)\alpha x} e^{-iux} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivy} dy = \delta[u - (\mu - 1)k_0\alpha] \delta(y)$$

- שלא במפתיע, הגל המתפזר נע (עבור זוויות קטנות) בכיוון

$$\theta_x \approx u/k_0 = (\mu - 1)\alpha; \quad \theta_y \approx v/k_0 = 0$$



עקיפה בחור מלבני

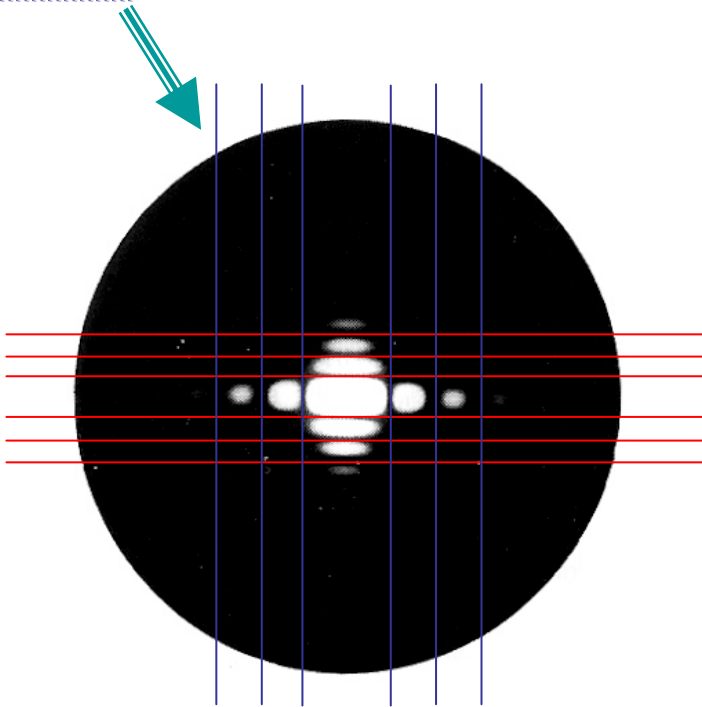
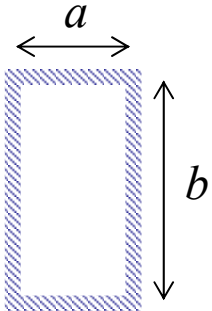
- בחור מלבני החשבון דומה לשל סדק, אלא ששני המימדים כעת סופיים:

$$\psi(u, v) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iux} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ivy} dy = ab \operatorname{sinc}(au/2) \operatorname{sinc}(bv/2)$$

- בגלל סימטריה החור, ההתמרה ממשיה. היא מכפלת התמרות הסדק בכוונים ניצבים.
- האפסים נמצאים על קוים מקבילים לקצוות הסדק, שבהם

$$u = \frac{2\pi m}{a}; \quad v = \frac{2\pi n}{b}$$

- השיא המרכזי מצוי בין הקוים $m, n = \pm 1$.
- השיאים האלכסוניים חלשים מאוד.



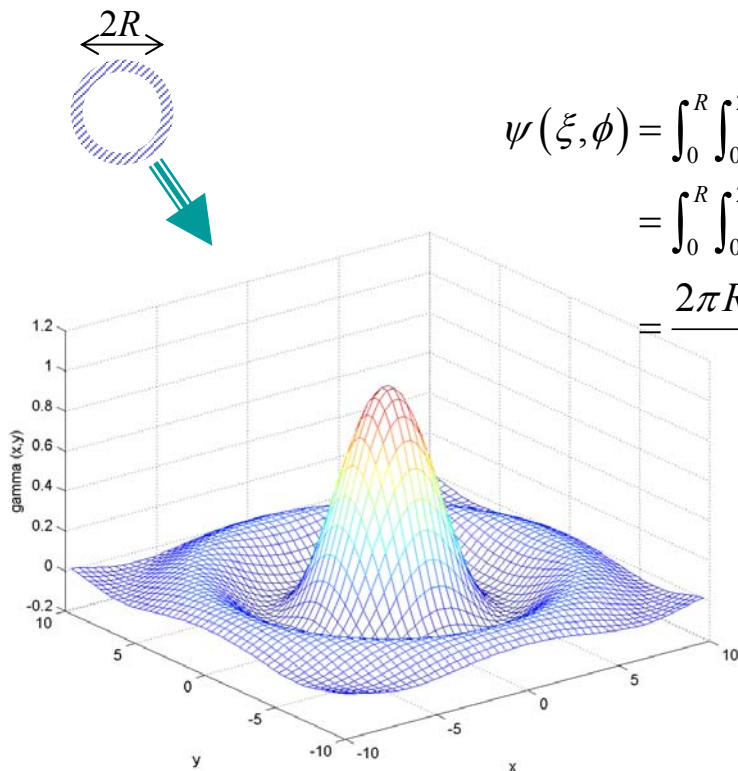
עקיפה בחור עגול

- בחור עגול לא ניתן להפריד את המשתנים. נעבור לקואורדינטות קוטביות בשני המרחבים

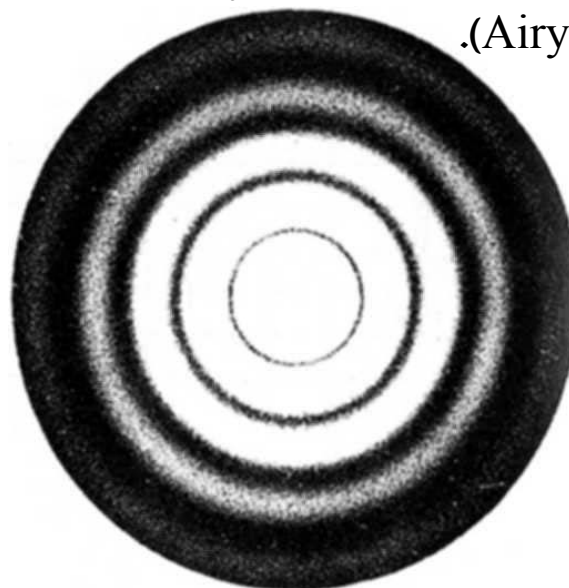
$$x = r \sin \theta; y = r \sin \theta$$

$$u = \xi \cos \phi; v = \xi \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \phi) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-i(r\xi \cos \phi \cos \theta + r\xi \sin \phi \sin \theta)] r dr d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp[-ir\xi \cos(\theta - \phi)] r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi R J_1(\xi R)}{\xi} = \pi R^2 \frac{2J_1(\xi R)}{\xi R} \end{aligned}$$



- זוהי פונקציית **איירי** (Airy).



פונקצית איירי

• פונקצית איירי, כמו פונקצית בסל, ניתנת לחישוב מספרי בלבד.

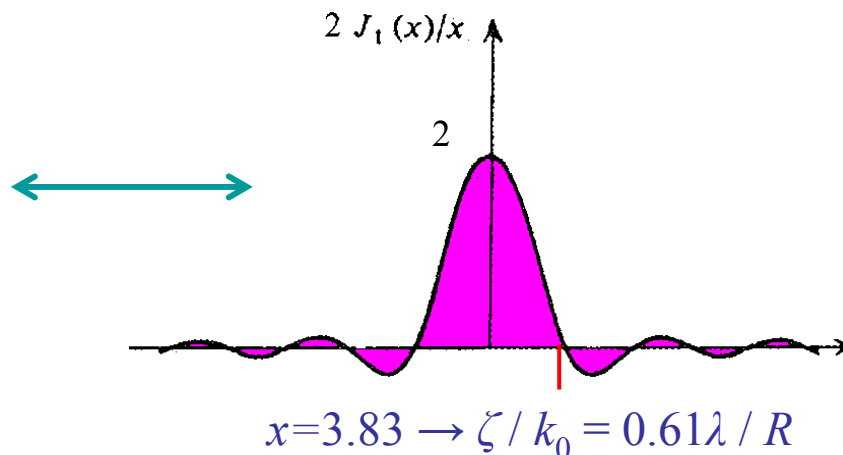
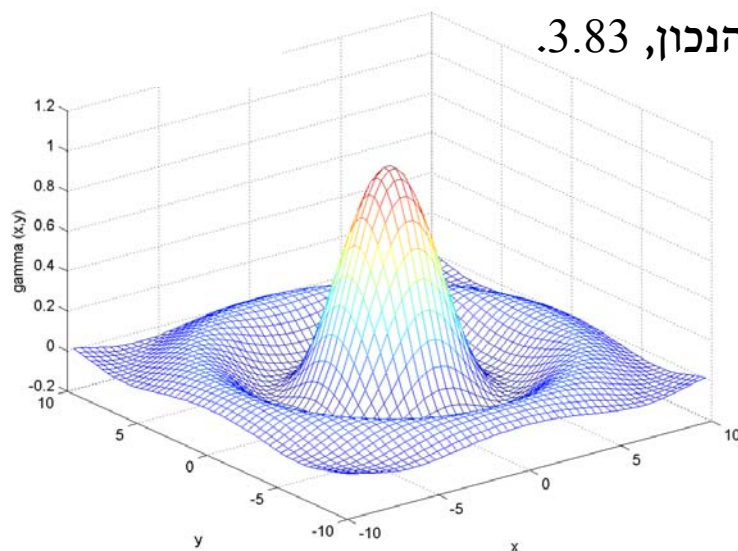
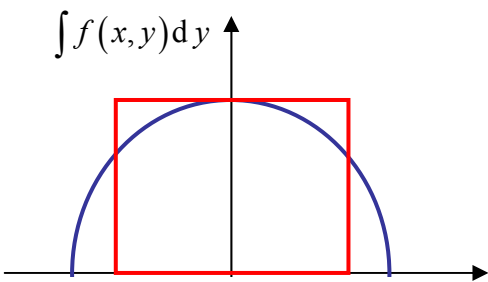
• רדיוס **דיסק** איירי הוא $1.22 \lambda / D$.

• בחישוב מקורב, נבדוק מה קורה לסדק מטושטש ששטחו כשל חצי העיגול.

• תמונת העקיפה של סדק שרוחבו $b = \pi R^2 / 2$ היא

$$\psi(u, 0) = 2\pi \frac{\sin(\pi u R / 4)}{\pi u} = \frac{\pi R}{2} \text{sinc}\left(\frac{\pi u R}{4}\right)$$

• כאן האפס נופל במרחק $u R = 4$ שהוא די קרוב לערך הנכון, 3.83.



סכום של תבניות עקיפה

- ניתן להשתמש בתכונת החיבוריות של התמרות לחשב תבניות של עצמים מסובכים יחסית.
- יש להקפיד שהראשית תהיה משותפת.
- מחברים חיבור מרוכב את ההתמרות המרוכבות של העצמים השונים.
- במקרה של עצמים סימטריים מרכזית, התמרותיהם ממשיות והחיבור ממשי אף הוא. למשל שלושה סדקים הם סכום של השניים החיצוניים לפנימי; ארבעה סדקים הם סכום של השניים החיצוניים ושל השנים הפנימיים (שהרווח ביניהם שליש מהחיצוניים).
- עצם אטום מייצר התמרה שלילית. למשל טבעת היא הפרש של מעגל חיובי ושלילי.

מסכים משלימים

- שני מסכים משלימים הם כאלו שכאשר האחד פתוח, השני סגור, וההפך.
- עקרון בַּבִּינֶה (Babinet):
- **תבנית ההתאבכות של שני מסכים משלימים זהה פרט לתחום קטן בראשית.**
- למשל, התבנית של דיסקים אטומים זהה לשל חורים באותם גדלים ומקומות.
- יהיו ψ_1 ו- ψ_2 המשרעות של תבניות העקיפה של מסכים משלימים, תחת אותם תנאי תאורה.
- נחבר את תבניות העקיפה המרוכבות של ψ_1 ו- ψ_2 ונקבל את התבנית של קרן רחבה ללא מסך.
- למשל עבור קרן נרחבת ועגולה, הסכום יהיה תבנית איירי, המרוכזת רק בסביבות הראשית.
- פרט לאזור זה, יהיו המשרעות של ψ_1 ו- ψ_2 זהות ומופען הפוך (שונה ב- π).
- בגלל שוויון המשרעות, תהיה העוצמה זהה.

הדגמת מסכים משלימים

- קשה לאמת ניסויית את עיקרון בבינה, בגלל העוצמה החזקה של השיא המרכזי.
- אם הקרן המלאה גדולה בשטחה, יהיה גם השיא חזק במיוחד ויתגבר על שאר תבנית העקיפה.
- לשפר את התוצאות, יש לדאוג לפרטים הבאים:

- קצוות הקרן המלאה צריכים להיות מטושטשים, דבר המנחית את שולי ההתמרה (ראה סדק מטושטש).
- קרן גאוסית מייצרת את השיא המרכזי החזק ביותר ללא שוליים.
- המסכה החיובית והשלילית צריכות להיות כמחצית ההעברה, לשיפור הניגוד של תבניות העקיפה שלהן.
- על המסכות להכיל פרטים עדינים כדי ליצור תבנית עקיפה נרחבת, רחוקה מן השיא המרכזי.

